

DOI 10.53364/24138614_2021_21_2_27

УДК 536.2:544.743:621.1.01

¹Кудайкулов А.К., ²Аринов Е.¹Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК²Жезказганский Государственный Университет имени О.А.Байконурова¹E-mail: kudaykulov2006@mail.ru*²E-mail: arinov91@mail.ru

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ
ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ОДНОВРЕМЕННЫМ
ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА, ТЕПЛООБМЕНА И
ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ**

**ЖЫЛУ АҒЫНЫНЫҢ, ЖЫЛУ АЛМАСУДЫҢ ЖӘНЕ ЖЫЛУ
ОҚШАУЛАУДЫҢ БІР МЕЗГІЛДЕ ӘСЕРІНЕН БОЛАТЫН АУЫСПАЛЫ
ҚИМАНЫҢ ӨЗЕГІНІҢ ТЕРМОМЕХАНИКАЛЫҚ КҮЙІН ЗЕРТТЕУ**

**INVESTIGATION OF THE THERMOMECHANICAL STATE OF A ROD OF
VARIABLE CROSS-SECTION UNDER THE SIMULTANEOUS INFLUENCE OF
HEAT FLOW, HEAT EXCHANGE AND THERMAL INSULATION**

Аннотация. Рассматривается горизонтальный стержень ограниченной длины. Радиус стержня меняется линейно по ее длине. Площадь поперечного сечения левого конца больше правой. Боковая поверхность исследуемого стержня полностью теплоизолирована. На площадь поперечного сечения левого конца подводится тепловой поток. Через площадь поперечного сечения правого конца стержня происходит теплообмен с окружающей средой. В работе определяются поле распределения температуры, перемещения, три составляющие деформации и напряжения при условии, что оба конца стержня жестко закреплены. А так же, определяется величина удлинения стержня при закреплении одного конца стержня и когда другой – свободен. В случае закреплении двух концов стержня вычисляется так же величина возникающего осевого сжимающего усилия. При исследовании стержня использовались фундаментальные законы сохранения энергии.

Ключевые слова: Удлинение, осевая сила, сечения, температура, перемещение, деформация, напряжение.

Abstract. A horizontal rod of limited length is considered. The radius of the rod changes linearly along its length. The cross-sectional area of the left end is larger than the right one. The side surface of the rod under study is completely thermally insulated. The heat flow is applied to the cross-sectional area of the left end. Heat exchange with the environment occurs through the cross-sectional area of the right end of the rod. In the work, the field of temperature distribution, displacement, three components of deformation and stress are determined, provided that both ends of the rod are rigidly fixed. And also, the value of the elongation of the rod is determined when one end of the rod is fixed and when the other is free. In the case of fixing the two ends of the rod, the value of the resulting axial compressive force is also calculated. In the study of the rod, the fundamental laws of conservation of energy were used.

Keywords: Elongation, axial force, cross sections, temperature, displacement, deformation, stress.

Аңдатпа. Мақалада шектеулі ұзындықтағы көлденең өзек қарастырылады. Өзектің радиусы оның ұзындығы бойынша сызықты өзгереді. Көлденең қимасының ауданы сол жақ аяғына қарағанда көбірек оң. Зерттелетін шыбықтың бүйір беті толығымен окшауланған. Жылу ағыны сол жақтың көлденең қимасына жеткізіледі. Өзектің оң ұшының көлденең қимасы арқылы қоршаған ортамен жылу алмасу жүреді. Жұмыс температураның таралу өрісін, қозғалуды, деформация мен кернеудің үш компонентін анықтайды, егер штанганың екі ұшы да қатаң бекітілген болса. Сондай – ақ, өзектің бір ұшын бекіту кезінде және екіншісі бос болған кезде өзектің ұзару мөлшері анықталады. Өзектің екі ұшын бекіту жағдайында пайда болған осьтік қысу күшінің шамасы да есептеледі. Өзекті зерттеуде Энергияны сақтаудың негізгі заңдары қолданылды.

Түйін сөздер: Ұзарту, осьтік күш, қималар, температура, қозғалыс, деформация, кернеу.

Введение

Многие несущие элементы газогенераторных, атомных и тепловых электростанций, реактивных двигателей и перерабатывающей промышленности являются стержнями переменного сечения. Для обеспечения надежной работы этих оборудований необходимо обеспечить термпрочность несущих элементов в виде стержней переменного сечения, которые работают при одновременном воздействии разнородных видов источников тепла. Из-за переменности сечения в таких стержнях возникают нелинейные термомеханические процессы. Для исследования природы таких процессов рассмотрим горизонтальный стержень ограниченной длины, переменного сечения. При этом радиус сечения меняется линейно по длине исследуемого стержня, т.е. $r = ax + b$, ($0 \leq x \leq l$), где l – длина стержня, $a, b - const.$. Площадь поперечного сечения стержня меняется нелинейно по длине стержня следующим образом $F(x) = \pi(ax + b)^2$ [см²]. Боковая поверхность исследуемого стержня по всей длине тепло-изолирована. На площадь поперечного сечения левого конца стержня $F(x = 0) = \pi b^2$, подводится тепловой поток с постоянной интенсивностью q [$\frac{watt}{cm^2}$]. Через площадь поперечного сечения правого конца стержня $F(x = l) = \pi(al + b)^2$ происходит теплообмен с окружающей средой. При этом коэффициент теплообмена h [$\frac{watt}{cm^2 \cdot ^\circ C}$], температура окружающей среды T_{oc} [°K] физико-механические свойства материала стержня характеризуется коэффициентом теплового расширения α [$\frac{1}{^\circ K}$], теплопроводность K_{xx} [$\frac{watt}{cm \cdot ^\circ K}$] и модуль упругости E [$\frac{kgf}{cm^2}$]. Схема исследуемого стержня приводится на рисунке 1.

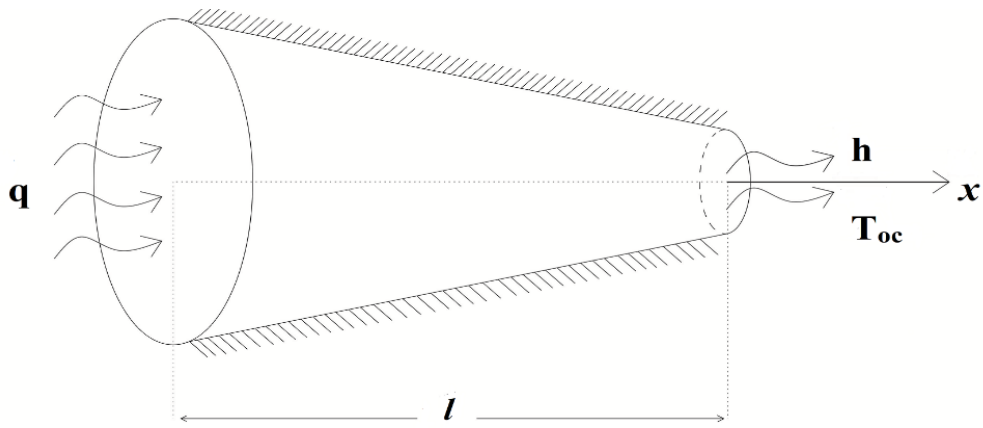


Рисунок 1. Схема исследуемого стержня.

Основная часть

При наличии теплового потока, теплоизоляции и теплообмена функционал полной тепловой энергии для исследуемого стержня имеет вид [1]:

$$J = \int_{F(x=0)} qTds + \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dv + \int_{F(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds, \tag{1}$$

где $T = T(x)$ поле распределения температур по длине стержня, которое аппроксимируется полным полиномом четвертого порядка

$$T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k + \varphi_m(x)T_m + \varphi_n(x)T_n \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ - являются сплайн функциями:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{(3l^4 - 25l^3x + 70l^2x^2 - 80lx^3 + 32x^4)}{3l^4}, \\ \varphi_j(x) &= \frac{(48l^3x - 208l^2x^2 + 288lx^3 - 128x^4)}{3l^4}, \\ \varphi_k(x) &= \frac{(-36l^3x + 228l^2x^2 - 384lx^3 + 192x^4)}{3l^4}, \\ \varphi_m(x) &= \frac{(16l^3x - 112l^2x^2 + 224lx^3 - 128x^4)}{3l^4}, \\ \varphi_n(x) &= \frac{-3l^3x + 22l^2x^2 - 48lx^3 + 32x^4}{3l^4}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq l \quad \text{где узловые значения температуры} \quad T_i = T(x=0); \quad T_j = T(x = \frac{l}{4}); \\ T_k = T(x = \frac{l}{2}); \quad T_m = T(x = \frac{3l}{4}); \quad T_n = T(x=l); \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом (2–4), минимизируя (1) по T_i , T_j , T_k , T_m и T_n получаем разрешающую систему алгебраических уравнений с учетом существующих естественных граничных условий. Решая систему определяем узловые значения температуры (4), а по (2) строим поле распределения температуры по длине стержня. Если один конец стержня жестко закреплена, а другой – свободен, то величина удлинения стержня Δl_T [см] определяется согласно общему закону теплофизики [1]

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha T(x) dx. \tag{5}$$

Если оба конца стержня, жестко закреплены, то в стержне возникает осевое сжимающее усилие R [кГ], которое определяется из условия совместности деформации [1]

$$R = \frac{\Delta l_T \cdot E \int_0^l F(x) dx}{l^2}. \quad (6)$$

В этом случае в стержне возникает поле распределения термо-упругой составляющей напряжения $\sigma(x)$ [$\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$]:

$$\sigma(x) = \frac{R}{F(x)}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (7)$$

Тогда согласно, закону Гука можно определить поле распределения термо-упругой составляющей деформаций $\varepsilon(x)$ [безразмерная]:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}. \quad (8)$$

Температурная составляющая деформаций $\varepsilon_T(x)$ [безразмерная] определяется согласно общему закону теплофизики [1]:

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha T(x). \quad (9)$$

Тогда согласно закону Гука определяется поле распределения температурной составляющей напряжения $\sigma_T(x)$ [$\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$]:

$$\sigma_T(x) = E \cdot \varepsilon_T(x) = -\alpha E \cdot T(x). \quad (10)$$

Согласно теории термоупругости определяются законы распределения упругих составляющих деформаций $\varepsilon_x(x)$ [безразмерная] и напряжения $\sigma_T(x)$ [$\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$]:

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon(x) - \varepsilon_T(x), \quad (11)$$

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = \sigma(x) - \sigma_T(x). \quad (12)$$

Для определения поле перемещения используется потенциальная энергия упругих деформаций [4]:

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x(x)}{2} \varepsilon_x(x) dv - \int_V \alpha E \cdot T(x) \cdot \varepsilon_x(x) dv. \quad (13)$$

Согласно соотношению Коши [4], имеем:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (14)$$

$$U = U(x) = \varphi_i(x)U_i + \varphi_j(x)U_j + \varphi_k(x)U_k + \varphi_m(x)U_m + \varphi_n(x)U_n, \quad (15)$$

где U поле перемещение.

Минимизируя Π по узловым значениям перемещения, строится система линейных алгебраических уравнений. Для решения этой системы нужно задать условия закрепления двух концов стержня, т.е. $U_i = U(x=0) = 0$; и $U_n = U(x=l) = 0$.

Далее определяя U_i, U_j, U_k, U_m, U_n и подставляя их в (15) строится поле перемещений. Для практического применения вышеизложенного метода и алгоритма, примем следующие исходные данные $l=20\text{см}$; $a = -\frac{1}{10}$; $b = 4\text{см}$; $\alpha = 0,0000125 \frac{1}{^\circ\text{K}}$;

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}; \quad K_{xx} = 100 \frac{\text{watt}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{K}}; \quad h = 10 \frac{\text{watt}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{K}}; \quad T_{oc} = 40^\circ\text{K}; \quad q = -500 \frac{\text{watt}}{\text{см}^2};$$

При этих исходных данных полученные решение приведены на рисунках 2-5.

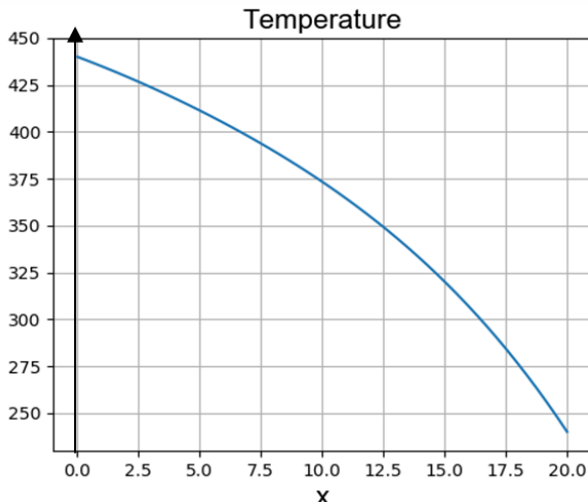


Рис.2. Зависимости температуры T по длине стержня

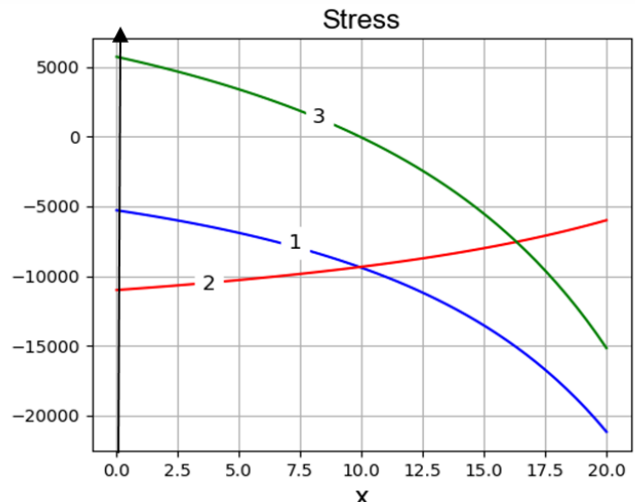


Рис.3. Зависимости напряжений по длине стержня

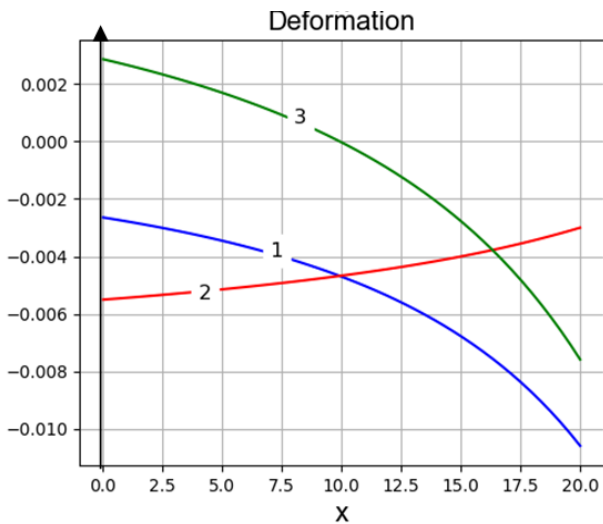


Рис. 4. Зависимости деформации по длине стержня

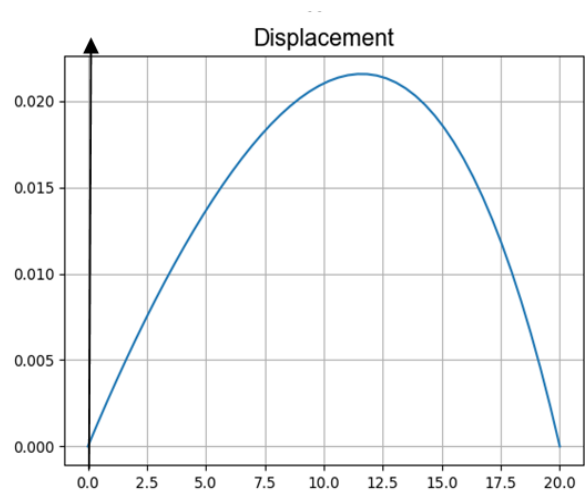


Рис.5. Зависимости перемещении по длине стержня

Решение

Из рисунка 2 видно, что значение температуры выше вблизи левого конца стержня, куда подведен тепловой поток. Из-за теплоизоляции боковой поверхности тепло теряется минимально, вследствие чего на правом конце стержня температура сохраняется на уровне 240°K .

Зависимости напряжений по длине стержня приведен на Рисунке-3 (1 – $\sigma(x)$ – термоупругое, 2 – $\sigma_T(x)$ – температурное, 3 – $\sigma_x(x)$ – упругое составляющее напряжения). Из рисунка видно, что термоупругое – $\sigma(x)$ и температурное – $\sigma_T(x)$ составляющие напряжения по всей длине стержня имеют сжимающий характер. В то время, как упругое – $\sigma_x(x)$ составляющее напряжения в области $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ имеет растягивающий характер, а в области $\frac{l}{2} \leq x \leq l$ сжимающий.

Зависимости деформаций по длине стержня приведен на Рисунке 4 ($1 - \sigma(x)$ – термоупругое, $2 - \sigma_T(x)$ – температурное, $3 - \sigma_x(x)$ – упругое составляющее деформация). Поле распределения составляющих деформаций являются пропорциональными к соответствующим напряжениям.

На рисунке 5 приводится поле распределения перемещений стержня закрепленного в двух концах. Отсюда видно, что все сечения (кроме за исключением) перемещаются в направлении оси x . Наибольшая амплитуда перемещения соответствует координате $x \approx \frac{3l}{5}$.

Выводы

Разработана численная модель нелинейных термомеханических процессов в стержне переменного сечения, основанная на фундаментальном законе сохранения энергии. Это позволяет получить достоверные численные результаты с учетом всех естественных граничных условий. Полученные результаты согласуются с соответствующими законами физики. Этот метод может быть использован для численного решения класса задач определен установившегося термомеханического состояния несущих элементов конструкции, работающих под воздействием разнородных видов источников тепла.

Литература

1. А.Кудайкулов, А. Жумадилаева Численное моделирование поля распределения температуры в объеме балки при одновременном наличии теплоизоляции, теплового потока и теплообмена // Acta physica polonica A, 2016. – С. 335-336.
2. Ташенова З., Нурлыбаева Е., Кудайкулов А. Подготовка метода и алгоритм решения стационарной задачи стержня в термонапряженном состоянии, удерживаемого на обоих концах, подверженных воздействию теплообмена и тепловых потоков // Международная конференция 2012 года по передовым наукам о материалах и производстве, ICAMMS 2012; Пекин; Китай;
3. Мухеят Ниязбек, Куэнсауле Талп, Кудайкулов А. К. Компьютерное и математическое моделирование термомеханических процессов в элементах конструкций. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, Том 50 . № 3. 2017, Тяньцзинь, Китай
4. Тимошенко С., Гудьер Дж. Н. Теория упругости. – Макгроу-Хилл. Книга. Компания. Inc., 1987. – 567 с.

References

1. A.Kudaikulov, A. Jumadillaeva Chislennoe modelirovanie polä raspredelenia temperatury v obeme balki pri odnovremennom nalichii teploizoläsii, teplovogo potoka i teploobmena // Acta physica polonica A, 2016. – S. 335-336.
2. Tašenova Z., Nurlybaeva E., Kudaikulov A. Podgotovka metoda i algoritm rešenja stasionarnoi zadachi sterjnä v termonapräjennom sostoianii, uderjivaemogo na oboih konsah, podverjennyh vozdeistviu teploobmena i teplovyh potokov // Mejdunarodnaia konferensia 2012 goda po peredovym naukam o materialah i proizvodstve, ICAMMS 2012; Pekin; Kitai;
3. Muheiat Niazbek, Kuensaule Talp, Kudaikulov A. K. Kompüternoe i matematicheskoe modelirovanie termomehanicheskikh prosessov v elementah konstruksi. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, Tom 50 . № 3. 2017, Tänszin, Kitai
4. Timošenko S., Gudier J. N. Teoria uprugosti. – Makgrou-Hill. Kniga. Kompania. Inc., 1987. – 567 s.